Grundlagen

1. Aufgabe:

Seien A, B, C Mengen und a, b, c logische Aussagen.

a)

$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$P(\{4, \{4, 6\}, 6\}) = \{\emptyset, \{4\}, \{\{4, 6\}\}, \{6\}, \{4, \{4, 6\}\}, \{4, 6\}, \{\{4, 6\}, 6\}, \{4, \{4, 6\}, 6\}\}$

b) $\{n \in \mathbb{N} \mid$ Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $n = 3 \cdot m + 1$ gilt$\}$

c) Behauptung: Es gilt $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Beweis: Sei $x \in (A \cup B) \setminus C$. Dann liegt x in A oder in B, aber nicht in C. Das heißt, x liegt in $A \setminus C$ oder in $B \setminus C$ und damit gilt $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, woraus $(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ folgt.
Sei nun $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. Dann liegt x in A, aber nicht in C oder in B, aber nicht in C, das heißt, x liegt in A oder in B, aber auf in jedem Fall nicht in C. Insgesamt folgt $x \in (A \cup B) \setminus C$ und damit schließlich die Behauptung.

d) Behauptung: $((a \vee \neg(b \wedge a)) \wedge (c \vee (d \vee c)))$ ist äquivalent zu $(c \vee d)$.

Beweis: Es ist
$(a \vee \neg(b \wedge a)) \wedge (c \vee (d \vee c))$
$\Leftrightarrow (a \vee \neg b \vee \neg a) \wedge (c \vee (d \vee c))$
$\Leftrightarrow 1 \wedge (c \vee (d \vee c))$
$\Leftrightarrow c \vee d$.

e) Behauptung: Im Allgemeinen gilt nicht $a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee c$.

Beweis: Es ist
$a \wedge (b \vee c)$
$\Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Seien nun c die Aussage "x ist eine reelle Zahl" und a die Aussage "x ist eine natürliche Zahl". Dann ist c verschieden von $a \wedge c$, denn $a \wedge c$ ist ist die Aussage: "x ist eine natürliche Zahl".

f) Behauptung: Es ist $\neg(a \vee ((a \vee b) \wedge b))$ äquivalent zu $\neg a \wedge \neg b$.

Beweis: Es ist
$\neg(a \vee ((a \vee b) \wedge b))$
$\underset{Absorptionsgesetz}{\Leftrightarrow} \neg(a \vee b)$
$\Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$.

g) Behauptung: Es ist $(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg c)$ äquivalent zu $(a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg a)$.

Beweis: Es ist
$(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg c)$
$\Leftrightarrow (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee a \wedge (\neg a \vee \neg c) \vee b \wedge (\neg a \vee \neg c)$
$\Leftrightarrow (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee a \wedge \neg a \vee a \wedge \neg c \vee b \wedge \neg a \vee b \wedge \neg c$
$\Leftrightarrow (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c) \vee a \wedge \neg c \vee b \wedge \neg a$
$\Leftrightarrow (\neg a \vee b \wedge \neg c) \wedge (b \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c) \vee a \wedge \neg c \vee b \wedge \neg a$
$\Leftrightarrow (\neg a \vee (b \wedge \neg c)) \wedge (b \wedge \neg c) \vee a \wedge \neg c \vee b \wedge \neg a$
$\Leftrightarrow (b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg a)$
$\Leftrightarrow (b \wedge \neg c) \wedge (a \vee \neg a) \vee (a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg a)$
$\Leftrightarrow (b \wedge \neg c) \wedge a \vee (b \wedge \neg c) \wedge \neg a \vee (a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg a)$
$\Leftrightarrow (b \wedge \neg c \wedge a) \vee (b \wedge \neg c \wedge \neg a) \vee (a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg a)$
$\Leftrightarrow (b \wedge \neg c \wedge a) \vee (a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg a)$
$\Leftrightarrow (a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg a)$

Aufgabe 2

a) $\{(1,2),(-1,-2)\}$ ist die vollständige Urbildmenge von $(0,4)$

$\emptyset$ ist die -"- von $(1,0)$

b) Mit (a) wissen wir, dass α weder injektiv, noch surjektiv ist.

c) Es ist $-(2^2) = -4 = -(-2)^2$, weshalb β nicht injektiv ist. Außerdem hat 3 kein Urbild, weshalb β auch nicht surjektiv ist.

d) Sei $z \in \mathbb{Z}$. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ so, dass $\Phi_z(a) = \Phi_z(b)$ gilt. Dann ist $a+z = b+z$, subtrahiert man z, so erhalten wir $a=b$, womit Φ_z injektiv ist.

Sei nun $r \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann ist auch $r-z \in \mathbb{Z}$ und es gilt $\Phi_z(r-z) = r-z+z = r$, sodass $r-z$ ein Urbild für r unter Φ_z ist und Φ_z surjektiv, also insgesamt bijektiv ist. Umkehrfunktion: Φ_{-z}

e) Nimmt man die Identitätsabbildung, d.h. alle $z \in \mathbb{Z}$ werden auf sich selbst abgebildet, so hat $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ kein Urbild unter dieser Abbildung, sodass wir keine Surjektivität haben.

Aufgabe 3

a) IA: Es ist $1^3 - 1 = 0 = 3 \cdot 0$.

IV: Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $n^3 - n$ durch 3 teilbar ist.

Indschritt: Es gilt $(n+1)^3 - (n+1)$

$$= (n+1)\left((n+1)^2 - 1\right)$$

$$= (n+1)\left(n^2+2n+1-1\right)$$

$$= (n+1)(n^2+2n)$$

$$= n^3+n^2+2n^2+2n$$

$$= n^3+3n^2+n-n+2n$$

$$= \underbrace{(n^3-n)}_{\substack{\text{ist mit} \\ \text{der IV durch 3 teilbar.}}} + 3n^2 + 3n$$

Da jeder einzelne Summand durch 3 teilbar ist, folgt nun die Behauptung.

b) IA: $1 \cdot (1+1) = 2 = \frac{6}{3} = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (1+2)}{3}$

IV: Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{\ell=1}^{n} \ell \cdot (\ell+1) = \frac{n \cdot (n+1)(n+2)}{3}$ gilt.

Ind.schritt: Es gilt:

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} \ell(\ell+1) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell(\ell+1) + (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}$$

c)

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}, n > 3$ gilt $n^2 > 3 \cdot n + 1$.

Beweis: per Vollst. Ind.:

IA: Es ist $4^2 = 16 > 13 = 3 \cdot 4 + 1$

IV: Sei $n \in \mathbb{N}, n > 3$ so, dass $n^2 > 3n + 1$ gilt.

Indschritt: Es gilt:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \underset{IV}{>} 3n + 1 + 2n + 1 = 3n + 2n + 2$$

$$\underset{n>3}{>} 3n + 2 \cdot 3 + 2$$

$$= 3n + 6 + 2 = 3n + 8$$

$$> 3n + 4 = 3n + 3 + 1$$

$$= 3(n+1) + 1$$

Aufgabe 4

a) Behauptung: R ist im Allgemeinen keine Äquivalenzrelation.

Beweis: Sei $A \in \mathcal{P}(M)$. Die identische Abbildung von A auf sich selbst ist bijektiv, weshalb $(A,A) \in R$ gilt und R damit reflexiv ist.

Seien $A, B, C \in \mathcal{P}(M)$ so, dass $(A,B), (B,C) \in R$ gilt. Seien dazu $\alpha: A \to B$ und $\beta: B \to C$ injektive Abbildungen. Dann ist auch $\beta \circ \alpha$ injektiv und bildet von A nach C ab, sodass auch $(A,C) \in R$ gilt und R damit transitiv ist.

Sei nun die gegebene Menge $M = \{1,2,3,4,5\}$. Dann existiert zwar eine injektive Abbildung von $\{1,2,3\}$ auf $\{1,2,3,4,5\}$, umgekehrt jedoch nicht, weshalb die Behauptung folgt.

b) Sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann ist $a - a = 0 = 5 \cdot 0$, weshalb $(a,a) \in T$ folgt. Sei nun $(a,b) \in T$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ so, dass $a - b = 5 \cdot k$ gilt. Dann gilt aber auch $-(a-b) = 5 \cdot (-k)$, sodass also $b - a$ auch durch 5 teilbar ist und damit $(b,a) \in T$ folgt.

Seien jetzt $(a,b), (b,c) \in T$. Dann ist $a - c = \underbrace{a-b}_{\text{durch 5 tb}} + \overbrace{b-c}^{\text{durch 5 tb.}}$ ebenfalls durch 5 teilbar.

Damit ist T eine Äquivalenzrelation.

Es gibt insgesamt 5 Äquivalenzklassen, da beim Teilen durch 5 in $\mathbb{Z}$ genau 5 Reste entstehen können [Rest 0, Rest 1, Rest 2, Rest 3, Rest 4].

Die Äquivalenzklasse der Zahl 1 ist
$[1] = \{5z + 1 \mid z \in \mathbb{Z}\} = 5\mathbb{Z} + 1$.

Weiterhin ist $[3] = 5\mathbb{Z} + 3 = \{5z + 3 \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Die Quotientenmenge von $\mathbb{Z}$ bezüglich T ist
$\{[0], [1], [2], [3], [4]\} = \mathbb{Z}/_T = \mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}} = \{5\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}+1, 5\mathbb{Z}+2, 5\mathbb{Z}+3, 5\mathbb{Z}+4\} = \{\{5,0,-5,\dots\}, \{6,11,\dots\}, \{7,12,\dots\}, \{8,13,\dots\}, \{9,14,\dots\}\}$.

c) $\{(a,b)\}$

d) Relationen sind Teilmengen von kartesischen Produkten. Es gibt $4 \cdot 4$ Möglichkeiten für die Elemente von $A \times A$. D.h. $|A \times A| = 16$. Dann gibt es genau $|\mathcal{P}(A \times A)| = 2^{16}$ Relationen auf A.

Algebraische Strukturen

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Es seien $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit 1 und $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Sei $g \in G$.
Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen.

a) $(g^{-1})^{-1} = g$.

b) Falls G nur 3 Elemente hat, ist G kommutativ.

c) R hat genau dann mindestens 2 Elemente, wenn $1 \neq 0$ gilt.

d) Wir definieren für ein festes $a \in R \setminus \{0\}$ die Abbildung $\phi : R \to R$ mit $\phi(x) := ax$ für $x \in R$. Falls R keine nicht-trivialen Nullteiler enthält, dann ist ϕ injektiv.

Lösung:

a) Es ist laut Vorlesung $g^{-1}g = gg^{-1} = 1$, also ist g das Inverse zu g^{-1}.

b) Sei $G = \{1, a, b\}$. Da G eine Gruppe ist, liegt ab wieder in G. Angenommen $ab = a$, dann folgt durch Multiplikation von a^{-1}, dass $b = 1$ ist, aber dann G nicht mehr 3 Elemente. Analog folgt $a = 1$, falls $ab = b$ ist. Somit ist $ab = 1$ und a und b sind zu einander invers, also gilt auch $ba = 1 = ab$.

c) Falls in R gilt $1 \neq 0$, dann liegen offensichtlich zwei verschiedene Elemente in R und somit ist $|R| \geq 2$. Nun habe R mindestens 2 Elemente. Angenommen $0 = 1$. Dann sei $e := 0 = 1$ und sei $a \in K \setminus \{0\}$. Dann gilt $ae = a$ und wegen Satz III.9 gilt aber auch $ae = 0$ und somit ist $a = 0$, aber das ist ein Widerspruch. Also gilt $1 \neq 0$.

d) Seien $y, x \in R$ so, dass $\phi(x) = \phi(y)$ ist. Dann ist $ax = ay$ und da R ein Ring ist, existiert das additive Inverse zu ay, somit folgt $ax - ay = 0$. Mit dem Distributivgesetz ergibt sich $a(x - y) = 0$. Da R nullteilerfrei ist und $a \neq 0$ ist, muss $x - y = 0$ gelten. Daraus folgt aber $x = y$. Also ist ϕ injektiv.

2. Aufgabe:

a) Sei $E := \{z = a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{R},\ |z| := \sqrt{a^2 + b^2} = 1\}$. Zeige, dass $(E, \cdot)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist bezüglich der Standardmultiplikation in $\mathbb{C}$.

b) Zeige, dass $F := \{p \in \mathbb{Q}[t] \mid \exists\ \alpha_0, \alpha_2, \alpha_4 \in \mathbb{Q} : p = \alpha_0 + \alpha_2 t^2 + \alpha_4 t^4\}$ eine kommutative Gruppe bezüglich der Polynomaddition bildet.

Lösung:

a) Wir benutzen Satz III.5 der Vorlesung. Es ist offensichtlich $E \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Weiter ist $|1| = |1 + 0i| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ und damit ist $1 \in E$ und $E \neq \emptyset$.
Seien $x := a + bi,\ y := c + di \in E$, dann ist

$$\begin{aligned}
|x \cdot y| &= |ac - bd + (ad + bc)i| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2} = \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} \\
&= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)}\sqrt{(c^2 + d^2)} = 1 \cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

Also ist $x \cdot y \in E$.
Betrachten wir das Inverse Element zu x in $\mathbb{C}$, dann ist $x^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$ (siehe Beispiel III.20). Da aber gilt $\sqrt{a^2+b^2} = 1$ folgt auch, dass $a^2 + b^2 = 1$ ist. Damit ist $|x^{-1}| = |a - bi| = |a + bi| = |x| = 1$. Damit ist auch $x^{-1} \in E$ und insgesamt ist E eine Untergruppe von $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ bezüglich der Multiplikation.

b) Es ist F eine Teilmenge von $\mathbb{Q}[t]$. Wir benutzen wieder Satz III.5 und zeigen, dass $(F, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}[t], +)$ ist. (Dann wissen wir auch, dass $(F, +)$ eine Gruppe ist, können uns aber z.B. den Nachweis der Assoziativität sparen.)
Zuerst ist das Nullpolynom in F enthalten, da wir $\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$ wählen können. Somit ist $F \neq \emptyset$.
Seien nun $p, q \in F$ und $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \beta_0, \beta_2, \beta_4 \in \mathbb{Q}$ so, dass $p = \alpha_0 + \alpha_2 t^2 + \alpha_4 t^4$ und $q = \beta_0 + \beta_2 t^2 + \beta_4 t^4$ ist. Dann ist

$$p + q = \alpha_0 + \alpha_2 t^2 + \alpha_4 t^4 + \beta_0 + \beta_2 t^2 + \beta_4 t^4 = \alpha_0 + \beta_0 + (\alpha_2 + \beta_2)t^2 + (\alpha_4 + \beta_4)t^4 \in F.$$

Denn für alle $i \in \{0, 2, 4\}$ ist $\alpha_i + \beta_i \in \mathbb{Q}$. ($\mathbb{Q}$ selbst ist ein Körper und damit insbesondere abgeschlossen unter Addition.)
Ebenso ist für alle $i \in \{0, 2, 4\}$ auch $-\alpha_i \in \mathbb{Q}$, damit ist $\tilde{p} := -\alpha_0 + (-\alpha_2)t^2 + (-\alpha_4)t^4 \in F$. Weiter ist $p + \tilde{p} = \alpha_0 + \alpha_2 t^2 + \alpha_4 t^4 + (-\alpha_0) + (-\alpha_2)t^2 + (-\alpha_4)t^4 = \alpha_0 - \alpha_0 + (\alpha_2 - \alpha_2)t^2 + (\alpha_4 - \alpha_4)t^4 = 0$. Damit ist $\tilde{p}$ das Inverse zu p.
Dass die Gruppe F kommutativ ist, folgt ebenfalls daher, dass sie eine Untergruppe von $\mathbb{Q}[t]$ ist. Wenn in $\mathbb{Q}[t]$ je zwei Elemente miteinander vertauschen, dann gilt das erst recht für eine Teilmenge von $\mathbb{Q}[t]$.

3. Aufgabe:

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und sei $g \in G$ fest. Wir definieren eine Abbildung $\phi : G \to G$ wie folgt: Für alle $y \in G$ sei $\phi(y) = g^{-1} \cdot y \cdot g$. Zeige, dass ϕ ein Gruppenhomomorphismus von G in sich selbst ist.
Bewirkt $\alpha : G \to G$ mit $\alpha(y) = g \cdot y \cdot g^{-1}$ für alle $y \in G$ auch einen Gruppenhomomorphismus? Welche Eigenschaft muss für die Gruppe gelten, damit ϕ für jedes $g \in G$ stets die identische Abbildung auf G ist?

Bonus: Zeige, dass ϕ bijektiv (also ein Isomorphismus) ist.

Lösung: Seien $x, y \in G$, dann ist $\phi(xy) = g^{-1}xyg = g^{-1}xgg^{-1}yg = \phi(x)\phi(y)$. Somit ist f ein Homomorphismus.
Angenommen es gilt $\phi(x) = \phi(y)$, dann ist $g^{-1}xg = g^{-1}yg$. Durch Multiplikation von links mit g und von rechts mit g^{-1} erhält man nun $x = y$. Also ist ϕ injektiv.
Sei nun $a \in G$ beliebig, dann setze $b := gag^{-1}$. Nun ist $\phi(b) = g^{-1}bg = g^{-1}gag^{-1}g = a$. Damit ist ϕ auch surjektiv. Insgesamt ist ϕ also ein Isomorphismus.
Auch für α kann man mit einem analogen Beweis zeigen, dass man einen Gruppenisomorphismus erhält. Falls die Gruppe kommutativ ist, ist für alle $y \in G$ $\phi(y) = g^{-1}yg = yg^{-1}g = y$.

4. Aufgabe:

Gib jeweils ein Beispiel an für die folgenden algebraischen Strukturen:

a) Ein Körper mit genau 5 Elementen.

b) Ein Ring mit 1, der nicht kommutativ ist.

c) Ein kommutativer Ring ohne 1, der mindestens 2 Elemente besitzt.

Lösung:

a) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

b) $R^{n,n}$ für $n \geq 2$

c) $2\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$, $4\mathbb{Z}$,...

Matrizen & Determinanten

1. alle möglichen Produkte & Summen

$B+E = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad AB = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad AC = \begin{pmatrix} 9 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad AE = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

$DC = 0$ $\quad CD = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad DE = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad DB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad EA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 7 & 4 & 4 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

1 Summe $\qquad$ 9 Produkte

2. $\det(A) = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$. $\Rightarrow$ invertierbar für $a \neq 1$

Rang:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{II} + (-1)\,\mathrm{I}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a+2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{III} + a \cdot \mathrm{II}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a+2 \\ 0 & 0 & -a^2+2a-1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{III} \cdot (-1)$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a+2 \\ 0 & 0 & a^2-2a+1 \end{pmatrix}$

$a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$

$\Rightarrow \operatorname{rang}(A) = \begin{cases} 3 & \text{falls } a \neq 1 \\ 2 & \text{falls } a = 1 \end{cases}$

Inverse

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{II} + (-1)\,\mathrm{I}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a+2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{III} + a \cdot \mathrm{II}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a+2 \\ 0 & 0 & -a^2+2a-1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{III} \cdot (-1)$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a+2 \\ 0 & 0 & a^2-2a+1 \end{pmatrix} \quad I + II \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & -a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & - & -a+2 \\ 0 & 0 & -1)^2 \end{pmatrix} \quad I + -\frac{2}{(a-1)^2} III \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & -a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -a+2 \\ 0 & 0 & (a-1)^2 \end{pmatrix} \quad II + \frac{a-2}{(a-1)^2} III \qquad \begin{pmatrix} \frac{-2a}{(a-1)^2} & \frac{2a}{(a-1)^2}+1 & \frac{2}{(a-1)^2} \\ -1 & 1 & 0 \\ a & -a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)^2 \end{pmatrix} \quad II \cdot (-1) \qquad \begin{pmatrix} \frac{-2a}{(a-1)^2} & \frac{2a}{(a-1)^2}+1 & \frac{2}{(a-1)^2} \\ \frac{a^2-2a}{(a-1)^2}-1 & \frac{-a^2+2a}{(a-1)^2}+1 & \frac{-a+2}{(a-1)^2} \\ a & -a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad III \cdot \frac{1}{(a-1)^2} \qquad \begin{pmatrix} \frac{-2a}{(a-1)^2} & \frac{2a}{(a-1)^2}+1 & \frac{2}{(a-1)^2} \\ -\frac{a^2-2a}{(a-1)^2}+1 & -\frac{-a^2+2a}{(a-1)^2}-1 & -\frac{-a+2}{(a-1)^2} \\ \frac{a}{(a-1)^2} & \frac{-a}{(a-1)^2} & -\frac{1}{(a-1)^2} \end{pmatrix}$$

3. Wahr oder falsch? Begründe / Widerlege 3 Aussagen

✗ Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(A) = 1 \wedge \det(B) = -1 \wedge \det(A+B) = 2$

$\Rightarrow \det(A+B) = 2 \neq 0 = \det(A) + \det(B)$

✗ Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann ist $\det(A) \neq 0$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n=2$, aber $\det(A) = 0$

$\rightarrow$ Aussage gilt nur für invertierbare Matrizen

✓ Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

✓ Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so ist $\det(A) \neq 0$.

$\Big\}$ nach Vorlesung

× Für $A \in \mathbb{R}^{6\times 4}$, dann sind folgende Aufgaben äquivalent: A hat vollen Rang $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = 6$

Da A nur 4 Spalten besitzt, kann die Anzahl linear unabhängiger Spalten, also der Rang, höchstens 4 sein.

✓ Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)$

Der Rang einer Matrix gibt die Anzahl linear unabhängiger Zeilen, bzw. linear unabhängiger Spalten an. Diese Anzahlen sind gleich. Da das Transponieren Zeilen und Spalten einer Matrix vertauscht, verändert es den Rang nicht.

4. a)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der 3. Spalte:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+3} \cdot a_{i3} \cdot \det A_{i3}$$
$$= 0 + (-1)^5 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 + 0$$
$$= -3 \cdot (4 + 48 + 0 - 0 - 0 - 20)$$
$$= -96$$

b) Behauptung: Für $n \in \mathbb{N}$, $D_n := \det(A)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $D_n = D_{n-1} - a^2 D_{n-2}$

Beweis mittels vollständiger Induktion.

IA Sei $n=1$. $\Rightarrow D_1 = \det(A) = 1$.

$n=4 \to D_3 - a^2 D_2$
$= 1 - 2a^2 - a^2(1-a^2)$
$= 1 - 3a^2 + a^4$

Sei $n=2 \Rightarrow D_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = 1 - a^2$

Sei $n=3 \Rightarrow D_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = 1 - 2a^2 = (1-a^2) - a^2 \cdot 1 = D_1 - a^2 D_2$

IV Es gelte die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$.

IS Es gilt $D_{n-1} = D_{n-2} - a^2 D_{n-3}$. z.z.: $D_n = D_{n-1} - a^2 D_{n-2}$.

$$D_n \overset{\text{Laplace nach 1. Z.}}{=} 1 \cdot \det(A^{(n-1)}) - a \cdot \det\left(\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & a & \ddots \\ 0 & a & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}\right) \overset{\text{Laplace nach 1. Z.}}{=} \det(A^{(n-1)}) - a^2 \det(A^{(n-2)})$$
$$= D_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

5. z. z. i) Assoziativität: Für $A, B, C \in GL_n(\mathbb{R})$ ist $\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\right)$

ii) $\exists N \in GL_n(\mathbb{R}): \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \; \forall A \in GL_n(\mathbb{R})$

iii) $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}) \; \exists \tilde{A} \in GL_n(\mathbb{R}): \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$

Beweis

i) Seien $A, B, C \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

$\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & ABC \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} BC & 0 \\ 0 & BC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\right)$

ii) Wir setzen $N = I_n$. $\Rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \; \forall A \in GL_n(\mathbb{R})$,

da $A \cdot I_n = A$ nach Definition der Einheitsmatrix.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

iii) Wir setzen $\tilde{A} = A^{-1}$. $\Rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$

nach Definition des Inversen Elements.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$ ist das inverse Element.

Lineare Gleichungssysteme

1. Aufgabe:

Stellen Sie folgende zwei Matrizen als Multiplikation von Elementarmatrizen dar

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3} \text{ mit } a \in \mathbb{Q}.$$

Lösung: Wir formen in Treppennormalform um

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,3}(-1)*} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{2,3}(-3)^\top*} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,3}(-1)^\top*} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_1(1/3)*}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,2}(-1)*} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,2}(-1)^\top*} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}*} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{2,3}*} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Das Resultat

$$P_{2,3} * P_{1,2} * G_{1,2}(-1)^\top * G_{1,2}(-1) * M_1(1/3) * G_{1,3}(-1)^\top * G_{2,3}(-3)^\top * G_{1,3}(-1) * A = I_3$$

lässt sich umformen zu

$$A = G_{1,3}(1) * G_{2,3}(3)^\top * G_{1,3}(1)^\top * M_1(3) * G_{1,2}(1) * G_{1,2}(1)^\top * P_{1,2} * P_{2,3}$$

Für die 2. Matrix formen wir um mit $a \neq 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{2,3}(-a)*} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ 0 & 1-a^3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,2}(-a)*} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1-a^3 \\ 0 & 1-a^3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_2(1/(1-a^3))*} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-a^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{M_3(1/(1-a^3))*} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,3}(-a)^\top*} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,2}(-a^2)^\top*} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{2,3}*} I_3$$

und erhalten in diesem Fall

$$B = G_{2,3}(a) * G_{1,2}(a) * M_2(1-a^3) * M_3(1-a^3) * G_{1,3}(a)^\top * G_{1,2}(a^2)^\top * P_{2,3}$$

Für $a = 1$ erhalten wir nach den 1. zwei Schritten die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

die wir mit den 2 Spaltenumformungen $*G_{1,2}(-1)^\top * G_{1,3}(-1)^\top$ in $E_{1,1}$ umformen. Also gilt für $a = 1$

$$G_{1,2}(-1) * G_{2,3}(-1) * B * G_{1,2}(-1)^\top * G_{1,3}(-1)^\top = E_{1,1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad B = G_{2,3}(1) * G_{1,2}(1) * E_{1,1} * G_{1,3}(1)^\top * G_{1,2}(1)^\top$$

2. Aufgabe:

Seien gegeben

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Treppennormalform von $B, [B, c_1]$ und $[B, c_2]$.

b) Geben Sie die zwei Lösungsmengen $\mathcal{L}(B, c_i)$ von $Bx = c_i, i \in \{1, 2\}$, an.

a) Wir formen $[B, c_1, c_2]$ gleichzeitig in Treppennormalform um

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 10 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{2,3}(-2)^\top *} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & -21 & -1 \\ 2 & 4 & 10 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_2(-1/7)*} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1/7 \\ 2 & 4 & 10 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{2,3}(-4)*}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1/7 \\ 2 & 0 & -2 & 10/7 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,3}(-3)^\top *} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & 11/7 \\ 0 & 1 & 3 & -1/7 \\ 2 & 0 & -2 & 10/7 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_1(1/5)*} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 11/35 \\ 0 & 1 & 3 & -1/7 \\ 2 & 0 & -2 & 10/7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{G_{1,3}(-2)*} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 11/35 \\ 0 & 1 & 3 & -1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_3(5/4)*} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 11/35 \\ 0 & 1 & 3 & -1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Treppennormalformen von $B, [B, c_1]$ und $[B, c_2]$ sind

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/35 \\ 0 & 1 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Da $\text{Rang}(B) = 2 = \text{Rang}(B, c_1)$ gilt, hat das lineare Gleichungssystem $Bx = c_1$ eine eindeutige Lösung und zwar

$$\mathcal{L}(B, c_1) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Da $\text{Rang}(B) = 2 \neq 3 = \text{Rang}(B, c_2)$ gilt, hat das Gleichungssystem $Bx = c_2$ keine Lösung. Es ist $\mathcal{L}(B, c_2) = \emptyset$.

3. Aufgabe:

Seien gegeben

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 & 16 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A, 0)$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

b) Zeigen Sie, dass $x = \begin{bmatrix} 1, 1, 1, -1 \end{bmatrix}^\top$ eine Lösung von $Ax = b$.

c) Geben Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A, b)$ nur mit Hilfe von a) und b) an.

a) Wir erzeugen die Treppennormalform von A

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 & 16 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_1(1/4)*} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,2}(2)*} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,3}(-2)*}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,2}(-1)^\top *}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Damit ist

$$\mathcal{L}(A,0) = \left\{ \left[x_1, x_2, x_3, x_4\right]^\top \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 6x_3 + x_4, x_2 = -9x_3 - 5x_4 \right\}$$

b) Es gilt

$$A * x = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 & 16 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+4+12-16 \\ -2-1+3+3 \\ 2+2+6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Damit ist $x \in \mathcal{L}(A,b)$.

c) Nach Vorlesung ist $\mathcal{L}(A,b) = x + \mathcal{L}(A,0)$, wenn $x \in \mathcal{L}(A,b)$. Damit

$$\mathcal{L}(A,b) = \left\{ \left[x_1, x_2, x_3, x_4\right]^\top \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1 - 1) = 6(x_3 - 1) + (x_4 + 1), (x_2 - 1) = -9(x_3 - 1) - 5(x_4 + 1) \right\}$$

$$= \left\{ \left[x_1, x_2, x_3, x_4\right]^\top \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 6x_3 + x_4 - 4, x_2 = -9x_3 - 5x_4 + 5 \right\}$$

4. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Rang von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & a & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & b & 0 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{3,3},$$

$$\text{und} \qquad C = \begin{bmatrix} t & t+1 & 2 \\ t^2 + 2t & t^2 + 3t + 2 & p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}\left[t\right]^{3,2}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{R}\left[t\right]$.

Man formt um

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & a & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,2}(-1/2)*} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & a & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,3}(-1)*} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \end{bmatrix}$$

Da kann man schon erkennen, dass für $a \neq 4$ der Rang von A drei ist und für $a = 4$ ist er zwei.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & b & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,2}(1)*} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & b & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,3}(1)*} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & b+2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{2,3}(b+2)*} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2b+2 \end{bmatrix}$$

Für $b = 0$ und $b = 1$ gilt $2b + 2 \neq 0$ und damit $\text{Rang}(B) = 3$. Für $b = 2$ gilt $2b + 2 = 0$ und damit $\text{Rang}(B) = 2$.

$$C = \begin{bmatrix} t & t+1 & 2 \\ t^2+2t & t^2+3t+2 & p \end{bmatrix} \xrightarrow{G_{1,2}(-t-2)*} \begin{bmatrix} t & t+1 & 2 \\ 0 & 0 & p-2t-4 \end{bmatrix}$$

Damit ist für $p(t) = 2t + 4$ der Rang von C eins und ansonsten zwei.

5. Aufgabe:

Kreuzen Sie alle wahren Aussagen an.

- ☒ Ein homogenes lineares Gleichungssystem $Ax = 0$ mit $A \in K^{n,m}$, $n > m$, ist immer lösbar.

  Richtig, da $0 \in K^m$ immer Lösung des homogenen LGS ist.

- ☐ Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in K^{n,m}, b \in K^n$, $n > m$, kann keine eindeutige Lösung haben.
  Falsch, wie man in 3c) bei $Bx = c_1$ sieht.

- ☐ Jedes lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in K^{n,m}, b \in K^n$, das mindestens 2 Lösungen hat, hat auch unendlich viele Lösungen.
  Falsch, wenn K nur endlich viele Elemente hat.

- ☒ Wenn ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in K^{n,m}, b \in K^n$, $n \geq m$, genau eine Lösung hat, muss $\text{Rang}(A) = m$ gelten.
  Richtig.

- ☐ Sei die Treppennormalform von $[A|b] \in \mathbb{R}^{3,6}$

  $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

  Dann hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ die Lösungsmenge

  $$\mathcal{L}(A, b) = \left\{ [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^\top \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_4, x_3 = 3 - x_4, x_5 = 0 \right\}$$

  Falsch, es müsste $x_3 = 3 + x_4$ heißen.